Tutorato 10 GE220

Docente: Massimiliano Pontecorvo. Esercitatore: Raffaele Carbone.
Tutori: Giovanni Passeri. Bruno Renzi.
Giovedì 17 maggio 2018

Esercizio 1.

1. *Calcolare* $\pi_1(\mathbb{R})$.
2. *Trovare un'equivalenza omotopica esplicita fra* $\mathbb{R}$ *ed un punto.*
3. *Calcolare* $\pi_1(\mathbb{R}^2)$.
4. *Calcolare* $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$.
5. *Calcolare* $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus S^1)$ *al variare di* $x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus S^1$.

Esercizio 2. *Sia* X *un insieme non vuoto, dotato della la topologia discreta. Calcolare per ogni* $x_0 \in X$ *il gruppo fondamentale* $\pi_1(X, x_0)$.

Esercizio 3. *Consideriamo il disco chiuso* $D := \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x|| \leq 1\}$ *e* $h : D \to D$ *un omeomorfismo. Mostrare che* $h(\partial D) \subseteq \partial D$.

L'asserzione resta vera se chiediamo solo che h *sia continua? E se chiediamo che* h *sia continua ed iniettiva? (In caso contrario, trovare un controesempio)*

Esercizio 4. *Siano* $f, g : X \to Y$ *due applicazioni continue che coincidono su un insieme* $D \subset X$ *denso. Mostrare che se* Y *è di Hausdorff allora* f *e* g *coincidono su tutto* X.

Esercizio 5. *Sia* X *spazio topologico, e* $A \subset X$ *retratto di* X*. Mostrare che:*

1. *Se* X *è compatto, allora* A *è compatto.*
2. *Se* X *è connesso, allora* A *è connesso.*
3. *Se* X *è di Hausdorff, allora* A *è chiuso. (Potrebbe essere utile ricordare che* $\Delta_X := \{(x,x) : x \in X\} \subset X \times X$ *è chiuso)*

Esercizio 6. ** Sia* A *un sottospazio affine di* $\mathbb{R}^3$*, di dimensione* r*. Studiare, al variare di* r *in* $\{0,1,2,3\}$ *e di* x_0 *nelle componenti connesse di* $X \setminus A$*, il gruppo fondamentale* $\pi_1(X \setminus A, x_0)$.